

基隆市國中數學輔導團分享

無限與圓滿

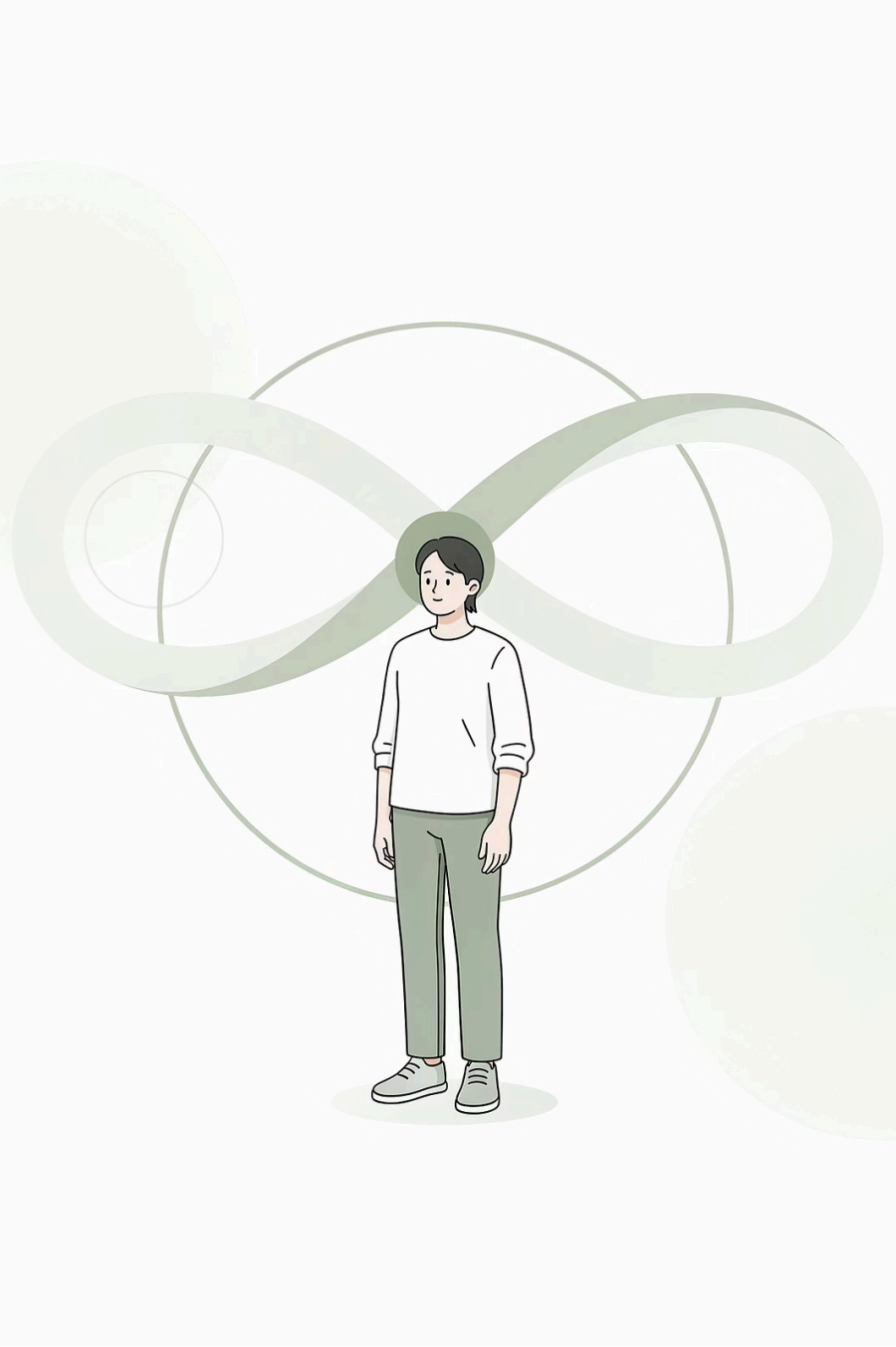
從 $0.9\bar{9}$ 遇見更好的自己



第一部分

直覺的衝突

15 分鐘



標題頁

【無限與圓滿】

從 0.9 遇見更好的自己。

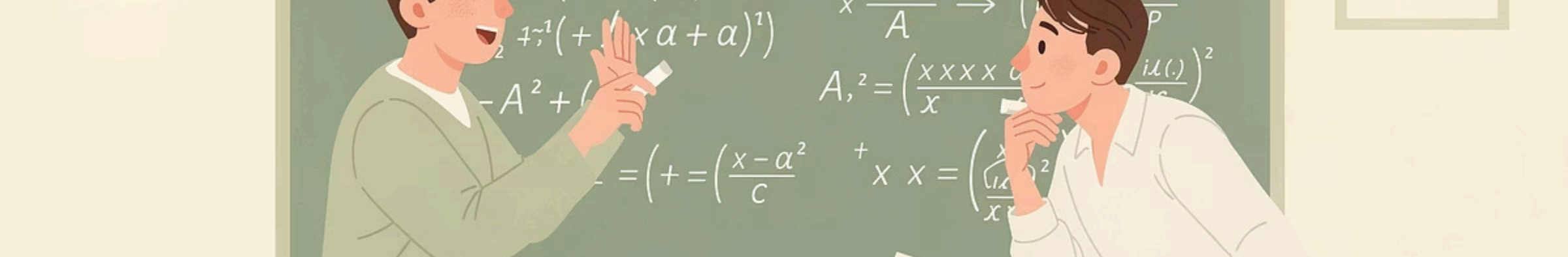
思考題

$0.\overline{9}$ 與 1

誰比較大？

放一個天平的圖，讓學生選邊站。





數學家的辯論

展示常見的直覺錯誤

直覺反應

明明就差了 0.00...1

困惑時刻

怎麼可能完全相等?

尋找差異

一定有微小的差距存在!

三大證明

01

分數法

$\frac{1}{3}$ 的三倍

$$\frac{1}{3} = 0.\bar{3}$$

$$3 \times 0.\bar{3} = 0.\bar{9} = 1$$

02

代數法

$$10x - x$$

$$\text{設 } x = 0.\bar{9}$$

$$10x = 9.\bar{9}$$

$$9x = 9, \text{故 } x = 1$$

03

數線法

中間還塞得進數字嗎?

在 $0.\bar{9}$ 與 1 之間找不到任何數字

第二部分

規律的掌握

35 分鐘

挑戰無限

如何把無限的小數關進有限的分數盒子裡?



純循環的秘密

以 $0.\overline{12}$ 為例,展示「平移消去法」。

步驟解析

1. 設 $x = 0.\overline{12}$
2. 乘以 100 $100x = 12.\overline{12}$
3. 相減: $99x = 12$
4. 得到: $x = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}$

📌 關鍵概念

平移讓循環部分對齊,相減後消去無限循環!

混循環的挑戰

以 $0.1\bar{2}$ 為例,引導出「跳過障礙物(不循環位)」的概念。



識別結構

不循環部分: 0.1

循環部分: $\bar{2}$



消去循環

再乘 10: $100x = 12.\bar{2}$

相減: $90x = 11$



設定變數

設 $x = 0.1\bar{2}$

先乘 10 $10x = 1.\bar{2}$



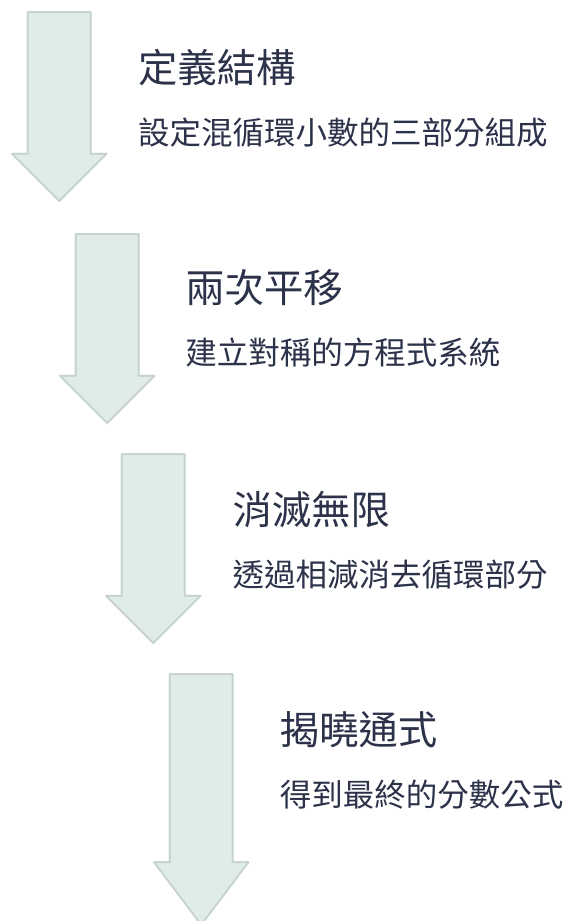
得到答案

$x = \frac{11}{90}$

資優生的視角:嚴謹推導

混循環小數的完整證明

從結構定義到通式推導,一步步建立數學的美感


$$m^2 = 2 \frac{2}{23^2} \rightarrow \frac{2^2}{5}$$
$$\left[\times x^2 \frac{1}{5} p^2 \frac{2^3}{5} \rightarrow \left(\frac{2}{28} \right) p\bar{x} \right]$$
$$\left[p\lambda^2 = \frac{2f^{22}}{5} + 1 \right]$$

步驟一:定義結構

假設一個小數 x ，它由三個部分組成

三個組成部分

1. 整數部分:我們暫且看作 0(因為整數直接加回去即可)
2. 不循環區 (Block A):共 k 位數(我們生命中的基礎、過去)
3. 循環區 (Block B):共 n 位數(我們不斷重複發揮的天賦、優勢)

$$x = 0.\underbrace{A}_{k \text{ 位}}\underbrace{\overline{B}}_{n \text{ 位}}$$

關鍵理解

A 是你的基礎,B 是你的循環天賦。我們要用代數把它們分離出來!

步驟二:兩次平移策略

資優生最喜歡「對稱」與「消除」。我們要建立兩個方程式,讓它們的「小數點後無限的部分」長得一模一樣。



第一步:移到循環節前

把 A 搬走

為了讓小數點正對著循環節,我們乘以 10^k

$$10^k \cdot x = A.\overline{B} \quad \text{— (式 1)}$$



第二步:再移過一個循環節

把一個 B 也搬走

在 (式 1) 的基礎上再平移 n 位,所以總共平移了 k+n 位,乘以 10^{k+n}

$$10^{k+n} \cdot x = AB.\overline{B} \quad \text{— (式 2)}$$

📌 重要提醒

這裡的 AB 不是 $A \times B$,而是數字的串接,例如 $A=12, B=34 \Rightarrow AB=1234$

$$\begin{aligned} 0.999\dots + \\ 0.333\dots = \\ 0.666\dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1.555\dots - \\ 0.777\dots = \\ 0.777\dots - \end{aligned}$$

步驟三:消滅無限(大減小)

現在,(式 1) 和 (式 2) 的小數點後全部都是 \bar{B} 。我們讓 (式 2) - (式 1)

關鍵操作

(式 2) - (式 1) 讓循環部分完全抵消

$$(10^{k+n} - 10^k)x = AB - A$$

☐ 數學的魔法時刻

無限循環的部分在相減中消失了!只剩下有限的數字。這就是「對稱消除」的威力。

步驟四:揭曉通式

$$x = \frac{AB - A}{10^{k+n} - 10^k}$$

這時,引導學生觀察分母的特性:

分母的結構

$$10^{k+n} - 10^k = \underbrace{10\dots0}_{k+n \text{ 個}} - \underbrace{10\dots0}_k$$

減完之後,前面會出現 n 個 9,後面跟著 k 個 0

最終公式

$$x = \frac{\text{全部數字} - \text{不循環數字}}{n \text{ 個 } 9 \text{ 接 } k \text{ 個 } 0}$$

分子:全部數字減去不循環部分

分母:循環位數個 9 + 不循環位數個 0

終極大通式

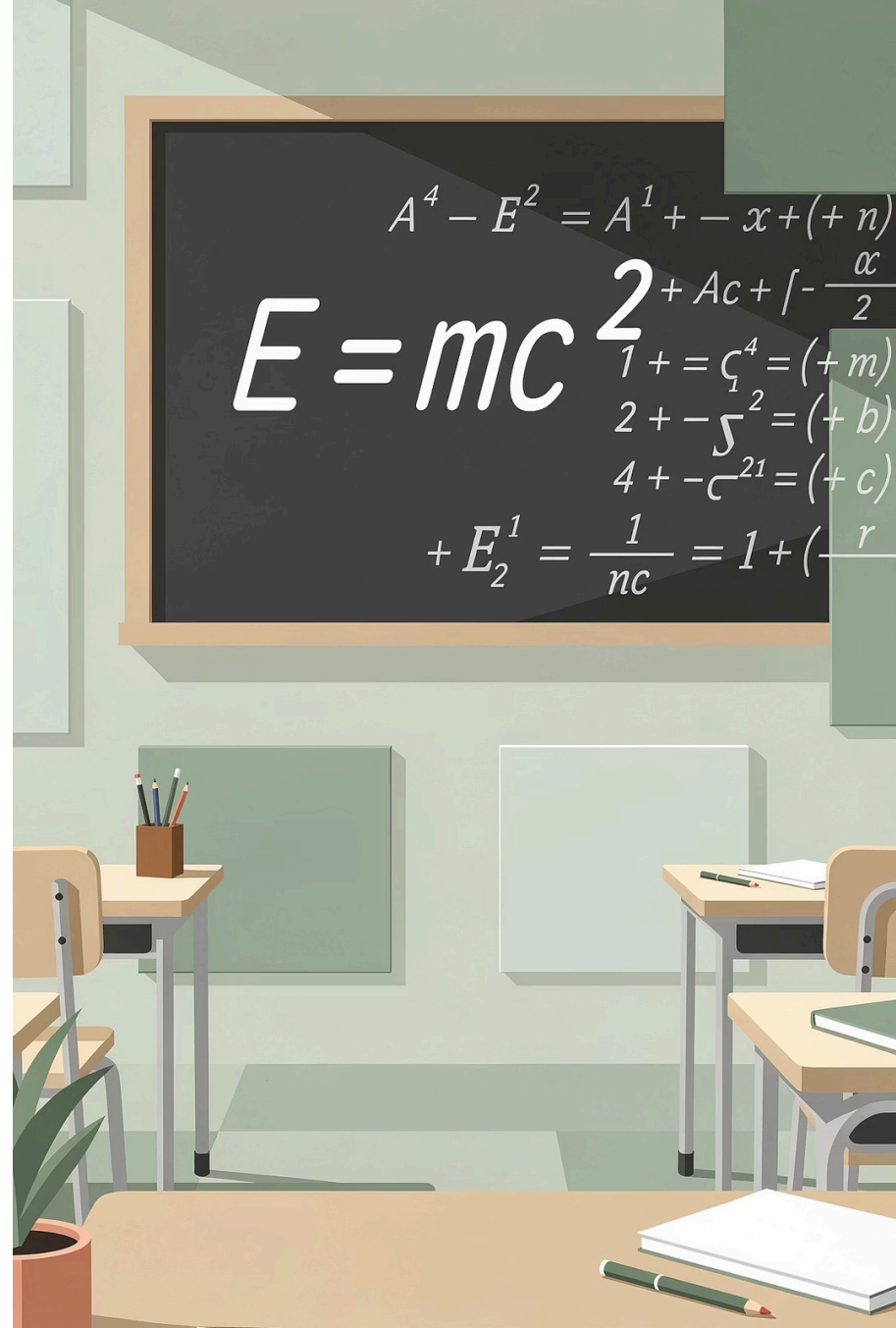
$$\text{分數} = \frac{\text{全部} - \text{不循環}}{\text{循環位數個 } 9 + \text{不循環位數個 } 0}$$

分子

全部數字減去不循環部分

分母

循環位數個 9 + 不循環位數個 0



小試身手

給出幾個挑戰題(如 $0.1\bar{6}$),並現場對答案。

1

挑戰題 1

將 $0.1\bar{6}$ 化為分數

答案: $\frac{16-1}{90} = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}$

2

挑戰題 2

將 $0.\bar{2}7$ 化為分數

答案: $\frac{27}{99} = \frac{3}{11}$

3

挑戰題 3

將 $0.25\bar{3}$ 化為分數

答案: $\frac{253-25}{900} = \frac{228}{900} = \frac{19}{75}$

第三部分

情意——看見隱形的 1

30 分鐘

消失的差值

如果 $1 - 0.\bar{9} = 0$

為什麼我們還在找那不存在的缺點？



檯, 素
友善



吹毛求疵的代價

討論「完美主義」。過度修正那 0.00...1 的微小不足,是否讓你停下了前進的腳步?

完美主義的陷阱

- 不斷尋找不存在的缺陷
- 因為微小差距而停滯不前
- 忽略已經達成的成就
- 永遠覺得「還不夠好」

接納的智慧

- 認識到「足夠好」的價值
- 看見努力的累積效果
- 理解無限接近就是抵達
- 放下對完美的執著

9 與 0 的生命隱喻

9 是你的循環天賦

那些不斷重複、持續努力的特質

你的堅持、你的熱情、你的專長

就像 $0.\overline{9}$ 中無限延伸的 9

0 是你的成長背景

那些看似平凡的起點

你的經歷、你的環境、你的基礎

就像小數點後的位置,決定了你的獨特性

轉身看見優勢

不要當一個找缺點的「減法家」,要當一個看見價值的「等價家」。

心靈的等號

情意反思

「在數學中,那一丁點的差距 $0.000...1$ 其實根本不存在。」

停止糾結

最近有哪件事,你覺得自己做得「不夠好」(那個 $0.00...1$ 的缺點)?

答: _____

看見優勢

承上題,如果用「等價值」來看,這件事展現了你什麼樣的特質(你的 $0.\bar{9}$ 循環節)?

答: _____

重新定義

我不再吹毛求疵,我要發揮我的優勢能力,那就是:

我的生命等式

請發揮創意,仿照今天的數學課,寫下你的「生命價值等式」

範例

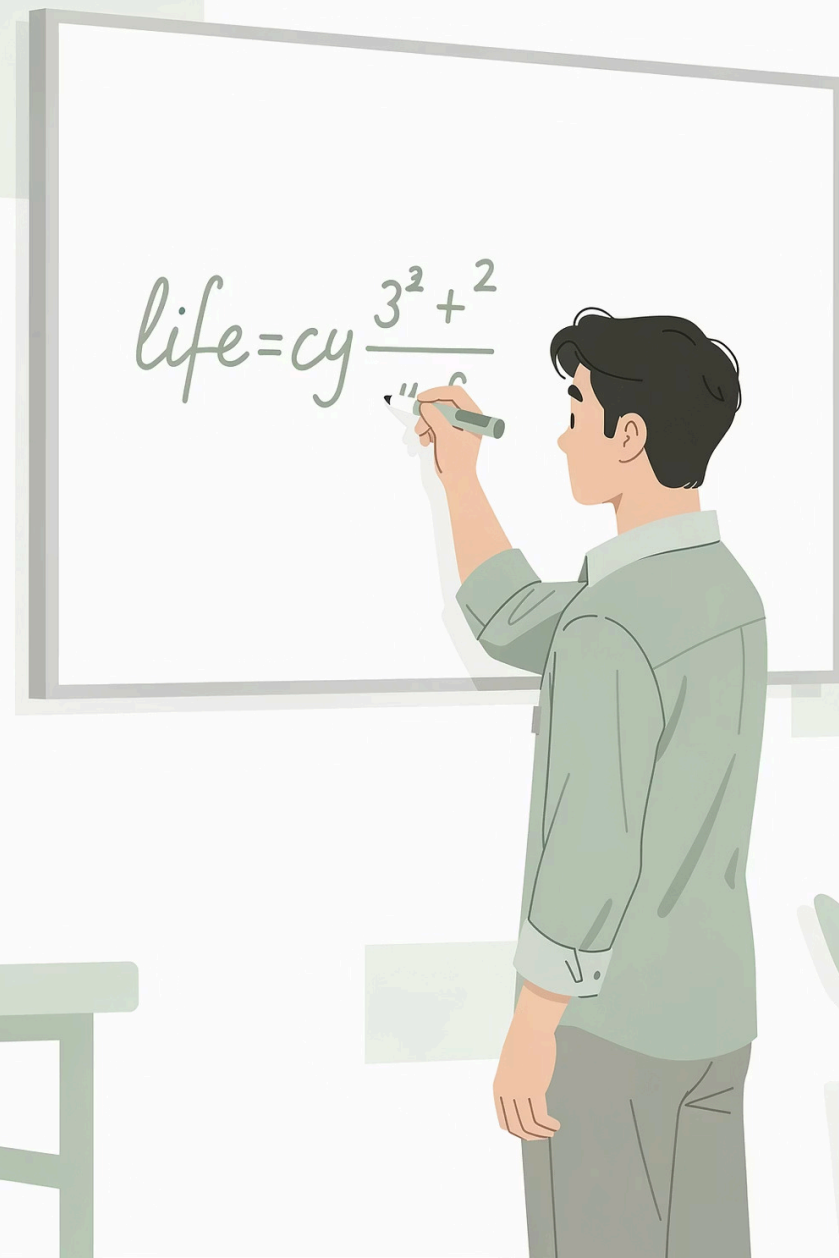
0. 好奇心 = 1(未來的科學家)

你的優勢特質不斷循環發揮,最終等同於你想成為的樣子

我的等式

□ 0. (我的優勢特質) =
1(我想成為的樣子)

在下方空白處寫下你的生命等式:



第四部分

總結

10 分鐘

A stylized illustration of a hand holding a glowing white sphere. The hand is rendered in a light orange and pink color with simple line art for fingers and palm. The sphere is bright white with a soft glow. The background is a light, warm gradient.

金句收尾

「你不需要『變成』完美,因為在數學與邏輯中,努力無限延伸的你,本身就等同於圓滿。」

下個單元預告

聖誕抽獎的奧秘

從循環小數的規律,我們即將進入另一個數學世界——聖誕抽獎

13	17	19	23	29
31	37	41	43	47
53	59	61	67	71
73	79	83	89	97

下次課程:質數遊戲 (實體互動, 表演題)

敬請期待

這些神秘的數字隱藏著什麼規律?我們將透過遊戲與互動,一起探索數學的美妙世界!

